Chapitre ⑤ : Les droites remarquables dans un triangle

I - Médiatrices d'un triangle :

1°/ Définitions :

* Définition ① :

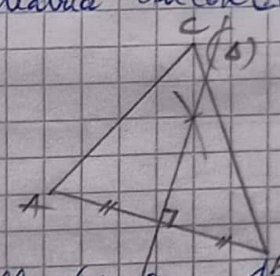
La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

* Définition ② :

La médiatrice d'un triangle est la médiatrice de l'un de ses côtés

2°/ Exemples

Soit ABC un triangle. Traçons (Δ) la médiatrice du côté [AB]



On appelle (Δ) la médiatrice du triangle ABC

3°/ Centre du cercle circonscrit à un triangle :

a - Propriété :

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de rencontre de ses trois médiatrices

* Remarque importante :

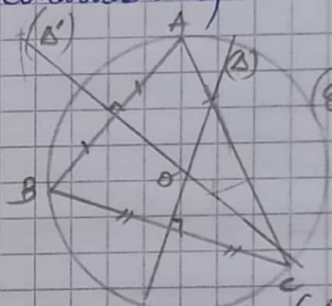
Pour déterminer le centre du cercle circonscrit à un triangle, il suffit de tracer deux de ses médiatrices

b - Exemple :

Soit ABC un triangle

Construisons (C) le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O.

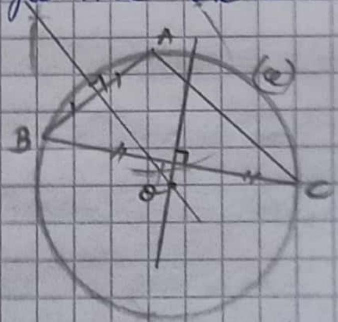
Pour cela, on va tracer (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des côtés [BC] et [AB]



c - Cas particulier : (triangle avec un angle obtus)

Soit ABC un triangle tel que $A\hat{B}C$ est un angle obtus.

Construisons (C) le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O



On remarque que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est à l'extérieur du triangle

II _ Bissectrice d'un triangle:

1°/ Définitions:

* Définition ①:

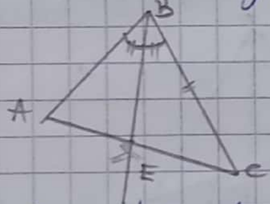
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

* Définition ②:

La bissectrice d'un triangle est la bissectrice de l'une de ses angles.

2°/ Exemple:

Soit ABC un triangle. Traçons [BE) la bissectrice de l'angle $A\hat{B}C$



On appelle [BE) la bissectrice du triangle ABC

3°/ Centre du cercle inscrit dans un triangle:

a_ Propriété:

Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point de rencontre de ses trois bissectrices.

*Remarque importante:

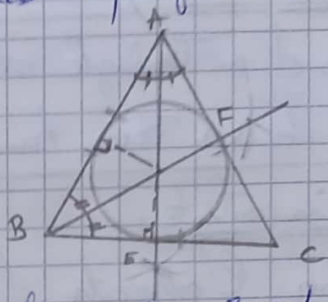
Pour déterminer le centre du cercle inscrit dans un triangle, il suffit de tracer deux des ses bissectrices

b_ Exemple:

Soit ABC un triangle

Construisons ($\mathcal{C}$) le cercle inscrit dans le triangle ABC de centre O.

Pour cela, on va tracer (AE) et (BF) les bissectrices respectifs des angles $B\hat{A}C$ et $A\hat{B}C$



Le centre du cercle inscrit dans un triangle se trouve toujours à l'intérieur du triangle.

III _ Hauteur d'un triangle:

1°/ Définitions:

*Définition ①:

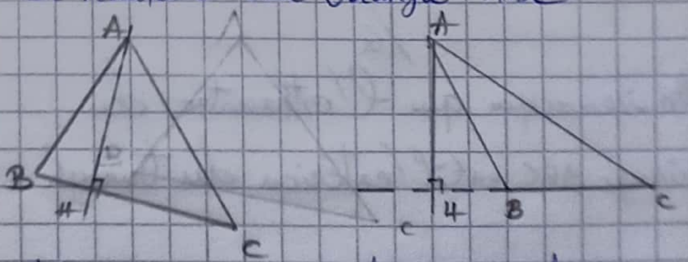
Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et qui est perpendiculaire à la droite portant le côté opposé à ce sommet.

* Définition ②:

La hauteur d'un triangle est la hauteur correspondante à l'un de ses côtés.

2°/ Exemple:

Soit ABC un triangle. Traçons (AH) la hauteur du triangle ABC



H est le projeté orthogonale de A sur (BC)

3°/ L'orthocentre d'un triangle :

a- Propriété :

L'orthocentre d'un triangle est le point de rencontre de ses trois hauteurs.

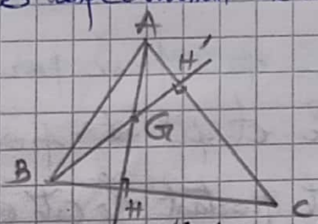
* Remarque importante :

Pour déterminer l'orthocentre d'un triangle il suffit de tracer deux de ses hauteurs.

b- Exemple :

Soit ABC un triangle. Construisons G, l'orthocentre du triangle ABC

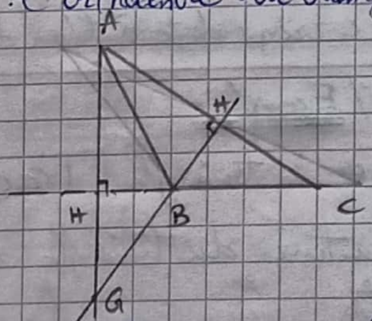
Pour cela, on va tracer (AH) et (BH') les hauteurs issues respectivement de A et B



c- Cas particulier : (triangle avec un angle obtus)

Soit ABC un triangle tel que $\hat{ABC}$ angle obtus

Construisons G l'orthocentre du triangle ABC



On remarque que l'orthocentre du triangle ABC est à l'extérieur du triangle

IV- Médiane d'un triangle

1°/ Définitions :

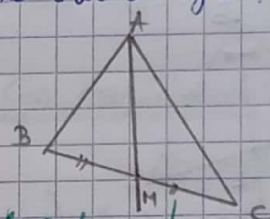
* Définition ① : La médiane d'un triangle est la droite passante par un sommet de ce triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet.

* Définition ② :

La médiane d'un triangle est la médiane correspondante à l'un de ses côtés.

2°/ Exemples

Soit ABC un triangle. Traçons (AM) la médiane du triangle ABC



3°/ Centre de gravité d'un triangle :

a- Propriété :

Le centre de gravité d'un triangle est le point de rencontre de ses médianes.

* Remarque importante :

Pour déterminer le centre de gravité d'un triangle, il suffit de tracer deux de ses médianes.

b- Exemple :

Soit ABC un triangle

Construisons G le centre de gravité du triangle ABC

Pour cela, on va tracer (AM) et (BM') les hauteurs issues respectivement de A et B

C – propriété caractéristique :

Si G est le centre de gravité d'un triangle ABC tel que M est le milieu de [BC]

alors, $\boxed{AG = \frac{2}{3} AM}$

*Exercice d'application :

Soit ABM un triangle tel que AM = 6 cm

C est le symétrique de B par rapport à M

M' est le milieu de [AC]

(AM) et (BM') se coupent en G

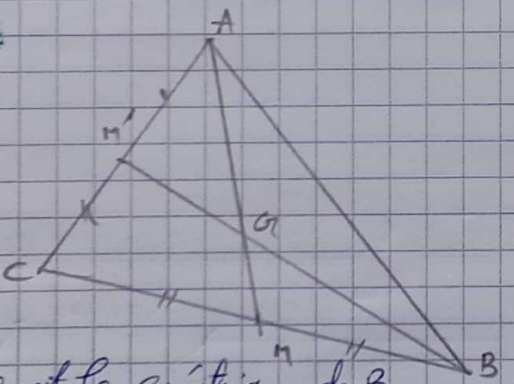
1°/ Tracer la figure

2°/ Montrer que G est le centre de gravité de ABC

3°/ Calculer AG

*Solution :

1°/



2°/ On a C est le symétrique de B par rapport à M

alors M est le milieu du côté [BC]

Donc (AM) est la médiane du triangle ABC

et on a M' est le milieu du côté [AC]

Donc (BM') est la médiane du triangle ABC

or (AM) et (BM') se coupent en G

alors G est le centre de gravité du triangle ABC

3°/ On a G est le centre de gravité de ABC et M est le milieu de [BC]

donc $AG = \frac{2}{3} AM$

$AG = \frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3}$

D'où $\boxed{AG = 4 \text{ cm}}$